새로운 Mexican Hat, L^1-웨이브릿의 이산복원정리와 그 응용

안주원[†] · 허영대[††] · 권기룡[†††] · 류권열[††††] · 문광석[†††††]

요 약

해석학 분야의 한 갈래인 웨이브릿 해석에서 CWT(continuous wavelet transform)는 Plancherel 형태의 복원정리가 성립하고, 웨이브릿 급수는 frame 이론과 다해상도 분석이론(multiresolution analysis; MRA)을 활용한 이산복원정리가 성립한다. 복원정리가 만들어짐에 따라 이에 상응하는 웨이브릿이 생성되는데, CWT에서는 허용조건(admissibility condition)을 만족하는 Basic 웨이브릿이고, 웨이브릿 급수에서는 MRA를 이용한 Daubechies 웨이브릿, frame 이론을 이용한 Meyer 웨이브릿 등을 생각할 수 있다.

본 논문에서는 CWT에서 사용한 허용조건을 자연스럽게 확장함으로써 기존의 것보다 간편하고 활용도가 우수한 이산복원정리를 발견하고, 이에 상응하는 보다 만들기 쉬운 새로운 형태의 L^1-웨이브릿 군을 개발함을 목적으로 한다. 본 연구에서 개발한 새로운 웨이브릿을 사용하여 시간-주파수에서의 신호 복원 및 분석에 응용한다.

New Mexican Hat, a Discrete Reconstruction Theorem of L^1-Wavelets and Their Applications

Jou-Won Ahn[†], Yeong-Dae Heo[††], Ki-Ryong Kwon[†††], Kwon-Yeol Ryu[††††] and Kwang-Seok Moon[†††††]

ABSTRACT

A wavelet analysis in a field of analytics is to create a reconstruction theorem of Plancherel form. And a series of wavelet is to create a discrete reconstruction theorem for a frame theory and a multiresolution analysis theory. As a generation of reconstruction theorem, a wavelet correspond to it is generated. That is to be like a basic wavelet which is satisfied an admissibility condition in CWT and a Daubechies wavelet using MRA in wavelet series and a Meyer wavelet using a frame theory.

In this paper, we discover a discrete reconstruction theorem which is superior to a conventional discrete reconstruction theorem by extending admissibility condition used in CWT and develop a New L^1-wavelet group. A new L^1-wavelet is applied to a signal reconstruction and a signal analysis in time-frequency region.

1. 서 론

정상(stationary)상태의 신호에 대한 분석은 푸리에 변환을 통하여 이루어지고 있다. 이것은 신호의 불규칙한 정도는 알 수 있지만, 전 시간영역 상에서 적분을 하므로 시간적으로 국부적인 특성을 만족하지 않는다. 분석을 하고자하는 신호가 비정상(non-stationary)적인 경우에는 신호가 시변 스펙트럼 특성을 갖기 때문에 짧은 시간동안 정상적인 신호로 가정하고 분석하는 STFT(short-time Fourier transform) 기법이 행해졌다[1,2]. 하지만 신호가 고주파

† 정회원, 부경대학교 대학원 전자공학과 박사과정 수료
†† 포항1대학 전산정보처리과 조교수
††† 정회원, 부산외국어대학교 전자 · 컴퓨터공학부 조교수
†††† 정회원, 위덕대학교 멀티미디어공학과 전임강사
††††† 종신회원, 부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부 교수

일 때는 푸리에 변환에서 커널(kernel)의 주파수 성분이 심한 발진(oscillation)으로 인해 신호의 강약에 상관없이 주파수 스펙트럼은 0으로 접근해서 우리가 원하는 스펙트럼 정보를 얻지 못하는 단점이 있다. 또한, 시간해상도가 주파수에 상관없이 항상 일정하므로 비정상상태의 신호해석에 불리하다[1]. 이 단점을 보완하기 위하여 Gabor는 시간분해능(time localization)을 원활하게 하는 윈도우 함수를 이용한 윈도우 푸리에 변환(windowed Fourier transform)을 제시하였다. Allen 등[2]은 분석하고자 하는 신호가 비정상상태인 경우에는 신호가 시변-스펙트럼 특성을 갖기 때문에 짧은 시간 동안 정상적인 신호로 가정하고, STFT 기법을 이용하여 신호를 분석 및 합성하는 기법을 제안하였다. 그러나 STFT 기법은 시간해상도가 주파수에 상관없이 항상 일정한 시간대에 옮겨지므로 보다 정교한 신호분석이나 비정상상태의 신호를 해석하는 경우에는 적절하지 못하며, 보다 나은 신호해석을 위해서는 어떠한 신호가 인가되더라도 적절한 시간-주파수 윈도우에서 스펙트럼 성분을 고려할 수 있어야 한다. 최근 이러한 단점을 보완할 수 있는 방법으로 웨이브릿 변환이 많이 사용되어지고 있으며, 웨이브릿 변환은 비정상적인 신호에 대한 해석방법으로 주파수에 따라 시간해상도가 변하는 특성을 가지고 있다.

웨이브릿은 1910년 Haar가 처음으로 고조파 해석(harmonic analysis)을 위하여 푸리에 스펙트럼을 옥타브 밴드로 나눈 직교 웨이브릿을 만들었다. Daubechies는 유한한 길이(compactly support)의 스케일링 함수 및 웨이브릿을 발생시킬 수 있는 Daubechies 웨이브릿을 제안하였고, Mallat 등[5]이 다해상도(multiresolution) 이론을 발표한 후 웨이브릿 변환 이론은 크게 발전 및 응용이 되어지고 있다. 웨이브릿 변환은 시간 및 주파수에 대하여 국부성(localization)을 가짐으로써 이의 변환은 통계적 특성을 모르거나 시간적으로 예측할 수 없는 불확정 신호를 처리하는 데 효과적으로 사용된다[3,4].

웨이브릿 변환은 주어진 시간함수를 실수의 2차원 평면 $L^2(R)$에서 직교기저함수(orthogonal basis function)들의 집합을 형성하고 있는 웨이브릿 평면으로 투사하여 서로 다른 분해능을 갖는 신호들로 변환시킴으로써 주어진 시간함수의 신호를 각각 다른 분해능에서 해석할 수 있는 변환이다. 웨이브릿 변환에서의 기저함수들은 원형 웨이브릿을 천이(translation) 및 확장/수축(dilation)을 시킴으로써 만들어진다[5].

본 논문에서는 수학적으로 증명하여 개발한 L^1-함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿 변환을 제안하고, 이를 사용하여 시간-주파수에서의 신호복원 및 분석에 응용한다. 제안한 웨이브릿은 L^1-함수 공간에서 허용조건을 만족하고, 복원조건이 성립하는 새로운 웨이브릿이다. 제안한 웨이브릿의 형태는 Mexican Hat과 유사하며, 제안한 새로운 웨이브릿 변환의 완전복원성을 증명하기 위하여 시간-주파수에서의 분석 및 복원에 대한 실험을 수행하였다. 실험을 위한 입력신호로서 고조파의 합성신호인 구형파, 정현파 및 비정상상태의 신호인 음성신호를 이용하였고, 실험결과로써 입력 원신호가 분해·합성 후 완전복원되어짐으로써 제안한 웨이브릿이 웨이브릿 조건 및 특성을 만족함을 확인하였다.

2. 웨이브릿 변환 이론

2.1 푸리에 변환 및 Gabor 변환

기존의 푸리에 해석은 L^2 공간에서 자승적분 가능한 신호를 유한구간 $(0, 2\pi)$에서 푸리에 급수로 분석한 것이다. 푸리에 변환은

$$(Ff)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1}$$

이다. 여기에서 $(Ff)(\omega)$가 고주파수일 때는 $e^{-i\omega t}$의 심한 발진으로 인하여 신호의 강약에 상관없이 0의 값으로 접근해서 원하는 스펙트럼 정보를 주지 못하는 단점이 있다.

이런 결점을 보완하기 위하여 D. Gabor는 1946년에 시간분해능을 원활하게 하는 윈도우 함수 $g(t-b)$를 활용해 다음과 같은 윈도우 푸리에 변환을 소개하였다. 이 윈도우 푸리에 변환은 주파수 ω에 관련없이 $e^{-i\omega t}g(t-b)$와 똑같은 포락선(envelope) 함수 g로 적정한 시간대에 옮겨지기 때문에 포락선의 폭이 일정하므로 보다 정교한 신호를 분석하는데는 적절하지 못하다.

$$(T^{win} f)(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x-t) e^{-iwx} dx \tag{2}$$

그러나 Gabor 변환은 Heisenburg의 'uncertainty

principle'에 의해서 가장 작은 시간-주파수 창을 형성하는 STFT임이 이미 알려져 있다. 여기서 윈도우 함수의 폭과 중심은 아래와 같이 정의되며 $\Delta_w \Delta_{\hat{w}} \geq \frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{중심} \quad t^* = \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x|w(x)|^2 dx \tag{3}$$

$$\text{폭} \quad \Delta_w = \frac{1}{\|w\|_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)|w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

보다좋은 신호분석을 위해서는 어떠한 신호가 들어오더라도 우리는 적절한 시간-주파수 창에서 스펙트럼 성분을 고려할 수 있어야 한다.

2.2 웨이브릿 변환

웨이브릿 변환 이론은 신호나 시스템 또는 프로세스를 특정한 함수들의 집합(wavelet set)들을 가지고 모델링하는 수학적인 도구이다[6]. 웨이브릿 변환에서 복원정리는 CWT와 웨이브릿 급수의 중심이론으로 알려지고 있다. CWT는 Plancherel 형태의 복원정리가 성립하고[7], 웨이브릿 급수는 frame 이론과 다해상도 이론을 활용한 이산복원정리가 성립한다[5]. 복원정리가 만들어짐에 따라 이에 상응하는 웨이브릿이 생성되는데, CWT에서는 허용조건(admissibility condition)을 만족하는 basic wavelet이고[6], 웨이브릿 급수에서는 MRA를 이용한 Daubechies 웨이브릿[3,4], frame 이론을 이용한 Meyer 웨이브릿 등[8]을 생각할 수 있다. 그림 1은 복원정리와 웨이브릿과의 관계를 나타낸 것이다.

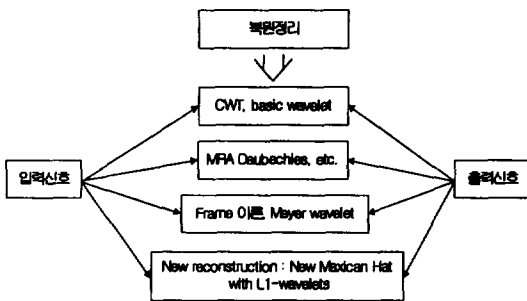



그림 1. 복원정리와 웨이브릿과의 관계

웨이브릿 함수는 vanishing moment를 갖도록 진동하며, 평균값이 0인 유한 에너지 함수라고 할 수 있다. 특정한 하나의 원형 웨이브릿 함수(mother wavelet)로부터 발생되는 웨이브릿 함수들의 집합은 임의의 함수를 근사화하는데 사용될 수 있다. 웨이브릿은 신호분석을 다양한 시간-주파수 영역의 창을 활성화하기 위하여 주어진 원형 웨이브릿 함수를 그림 2와 같이 binary dilation과 dyadic translation으로 이산화함으로서 각 주어진 윈도우에서 $L^2(R)$공간에 있는 모든 신호를 서로 다른 분해능을 갖는 다양한 주파수의 파형으로서 분해하는 것에 목적을 두고 있다. 즉, 웨이브릿 변환은 그 공간에 있는 시간함수의 신호를 각각 다른 분해능에서 해석하기 위하여 웨이브릿 급수로 표현하는데 목적이 있다.

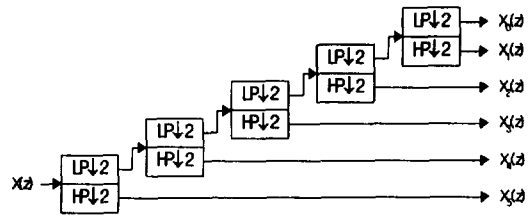



그림 2. 옥타브 필터뱅크를 이용한 이산 웨이브릿 변환

웨이브릿 변환에서 기저함수는 원형 웨이브릿을 천이 및 확장/수축을 시킴으로써 만들어진다. 이에 대한 웨이브릿 기저함수들의 선형결합은

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in R, a \neq 0 \tag{5}$$

이다. 여기서 a는 원형 웨이브릿을 확장/수축시키는 스케일 변수이고, b는 천이를 나타내는 천이변수이다. 어떤 신호 $f(t)$에 대한 웨이브릿 변환은

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \tag{6}$$

로 정의된다. 여기서 매개변수 a, b가 정수일 때 이산 웨이브릿 변환(discrete wavelet transform ; DWT)이라고 한다. 특히 $a = 2^m$, $b = n2^m$일 때 정규직교 기저를 구성할 수 있고, 기저함수는

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n) \tag{7}$$

가 된다.

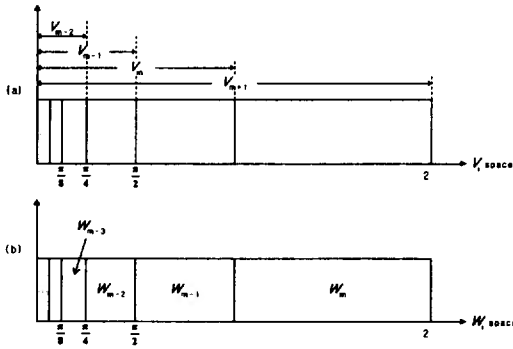



그림 3. 다해상도 분해의 공간 (a) 스케일 함수 V_i 공간, (b) 웨이브릿 함수 W_i 공간

신호를 다해상도로 분할하기 위하여 그림 3과 같이 V_m을 $\phi_{m,n}(t)$에 의해 구성되는 벡터공간이라 하면 $\phi_{m,n}(t)$는 V_{m+1}에서 V_m의 직교보수(orthogonal complement) 공간 W_m의 직교기저를 이룬다.

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m \quad V_m \perp W_m \tag{8}$$

여기서 $\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}t-n)$는 스케일링 함수 $\phi(t)$를 신축 · 이동하여 만들어진 정규직교기저이다. 이때 스케일링 함수 $\phi(t)$와 웨이브릿 함수 $\psi(t)$는

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_0(n)\phi(2t-n) \tag{9}$$

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_1(n)\phi(2t-n) \tag{10}$$

이다. 여기서 $h_0(n)$ 및 $h_1(n)$는 스케일링 및 웨이브릿 함수의 필터계수이다. STFT와 웨이브릿 변환에 대한 시간-주파수 영역에 대한 국부 윈도우의 크기 변화는 그림 4와 같다.

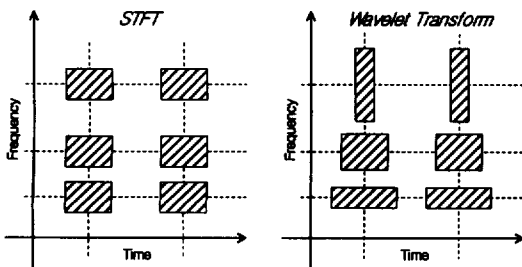



그림 4. STFT와 웨이브릿 변환에 대한 국부 윈도우의 크기 변화

3. 웨이브릿 변환 기법

3.1 Haar 웨이브릿

Haar 웨이브릿은 가장 간단한 원형 웨이브릿으로 스케일 함수는

$$\phi = 1, \quad 0 \le t < 1 \tag{11}$$

이다. 이에 대한 두 개의 스케일 특성은

$$\phi_0(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \tag{12}$$

이고, 이의 저주파 필터 계수는 그림 5에서와 같이 $h_0(n) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$이다. 또한 웨이브릿 함수는

$$\psi_0(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1) \tag{13}$$

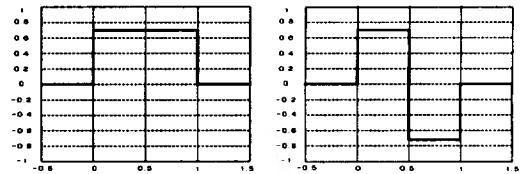
이고, 이의 고주파 필터는 $h_1(n) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$이다[9].

(a) Scaling function (b) Wavelets

그림 5. Haar 웨이브릿

3.2 Daubechies 웨이브릿[8]

Daubechies 웨이브릿은 이산 웨이브릿 변환 방법으로서 유한길이(compactly support)을 만족하는 비대칭형의 웨이브릿이다. 스케일링 함수는

$$\sum_n h_0(n) = \sqrt{2} \tag{14}$$

를 만족하고 D4에 대한 계수값은

$$h_0 = [0.4830 \quad 0.8365 \quad 0.2241 \quad -0.1294]$$

이다. 또한 웨이브릿 함수는

$$\sum_n h_1(n) = 0 \tag{15}$$

을 만족하고, D4에 대한 계수값은

$$h_1 = [0.1294 \quad 0.2241 \quad -0.8365 \quad 0.4830]$$

이다. Daubechies 웨이브릿에 대한 스케일링 함수

및 웨이브릿은 그림 6에서와 같다.

(a) Scaling function (b) Wavelets

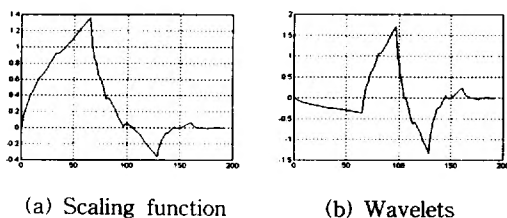



그림 6. Daubechies 웨이브릿

3.3 Meyer 웨이브릿

스케일링 및 웨이브릿과 함수는 주파수 영역에서 정의된다. 스케일링 함수는

$$\phi(\omega)=(2\pi)^{-1/2},\quad |\omega|\le\frac{2\pi}{3} \tag{16}$$

$$\phi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right),\quad \frac{2\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{4\pi}{3} \tag{17}$$

$$\phi(\omega)=0,\quad |\omega|\ge\frac{2\pi}{3} \tag{18}$$

이다. 웨이브릿 함수는

$$\psi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}e^{j\omega/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right),\quad \frac{2\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{4\pi}{3} \tag{19}$$

$$\psi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}e^{j\omega/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\omega|-1\right)\right),\quad \frac{4\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{8\pi}{3} \tag{20}$$

$$\psi(\omega)=0,\quad |\omega|\notin\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right] \tag{21}$$

이다. 여기에서 $a\in[0,1]$일 때 $\nu(a)=a^4(35-84a+70a^2-20a^3)$이다. 여기서 ν는 부가함수(auxiliary function)이다. Meyer 웨이브릿에 대한 스케일링 함수 및 웨이브릿은 그림 7에서와 같다.

(a) Scaling function (b) Wavelets

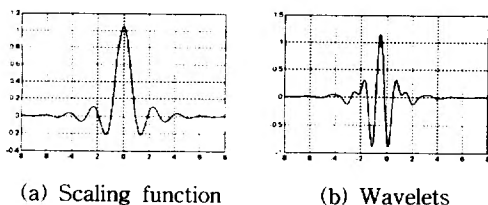



그림 7. Meyer 웨이브릿

3.4 Mexican Hat 웨이브릿

Mexican Hat 웨이브릿 함수는 스케일링 함수가 없고, 가우시안 확률 밀도 함수를 이차 도함수에 의해 얻어진 함수이다. 웨이브릿 함수는

$$\psi(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\right)(1-x^2)e^{-x^2/2} \tag{22}$$

이다. 따라서 Mexican Hat은 가우시안 확률 밀도 함수의 2차 도함수에 비례한다. Mexican Hat 웨이브릿은 그림 8에서와 같다[10].

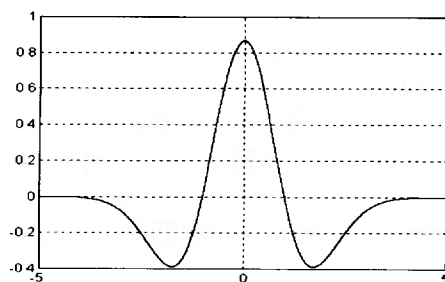



그림 8. Mexican Hat 웨이브릿

4. 제안한 새로운 L^1-웨이브릿

$f\in L^1(R)$라 두면 푸리에 변환 $\hat{f}$을

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,\quad t\in R \tag{23}$$

으로 정의한다.

$$g_{a,b}(x)=|a|^{-\frac{1}{2}}g\left(\frac{x-b}{a}\right),\quad (a,b)\in R^*\times R \tag{24}$$

로 정의하면 $g\mapsto g_{a,b}$ 는 $L^2(R)$상에서 unitary operator이다. 웨이브릿은 허용조건을 만족하는 단 하나의 함수 $g\in L^2(R)$ 에서 이동 및 확장/수축으로 만들어진 $\{g_{a,b}\}$군으로 구성된다. 허용조건이라 함은 $g\in L^2(R)$이 다음을 만족할 때이다.

$$\begin{aligned}0<C_g &= \int_0^{\infty}\frac{|\hat{g}(x)|^2}{x}dx\\ &= \int_0^{\infty}\frac{|\hat{g}(-x)|^2}{x}dx<\infty\end{aligned} \tag{25}$$

이러한 g를 basic wavelet이라고 부른다. 각 basic wavelet g에 대하여,

$$(\Phi_g f)(a,b)=\int_R f(x)\overline{g_{a,b}}(x)dx \tag{26}$$

를 연속 웨이브릿 변환으로 정의한다. 그러면 다음의 Plancherel 형태의 공식과 복원정리가 성립한다.

A. g가 허용조건을 만족하고 $f \in L^2(R)$일 때,
$$\int_{\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}|\Phi_g f(a,b)|^2\frac{da}{a^2}\,db = C_g\int_{\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$
가 성립한다.

B. ϕ가 CWT $\Phi_\phi f$를 정의하는 basic wavelet이라 하자. 그러면 $f \in L^2(R)$가 $x \in R$에서 연속일 때, $f(x) = \frac{1}{C_\phi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[\Phi_\phi f(a,b)]\psi_{a,b}(x)\frac{da}{a^2}\,db$로 복원된다.

위의 정리에 의해 우리는 $f \in L^2(R)$이 $\Phi_\phi f$로 복원됨을 알 수 있고, 위의 사실을 이용해 다음과 같은 이산복원정리를 생각할 수 있다. $\sigma>1$, $r>0$ 라 두고 $a_n = \sigma^n$, $b_{mn} = rma_n$, $n, m \in Z$라 두자. 그러면 $a_{n+1} - a_n = (\sigma-1)\sigma^n$, $b_{m+n,n} - b_{m,n} = r\sigma^n$로 된다. 그러므로 $\frac{dadb}{a^2} \approx (\sigma-1)r$이다.

그러면 $f(t) = \frac{1}{C_\phi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\int_{b_{m,n}}^{b_{m+1,n}}\Phi_\phi f(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}$
$\approx \frac{(\sigma-1)r}{C_\phi}\sum_{m,n}\Phi_\phi f(a_n, b_{m,n})\psi_{a_n b_{m,n}}(t)$로 접근된다.

만약에 $\psi_{nm}(t) = \psi_{a_n, b_{mn}}(t) = \sigma^{-\frac{n}{2}}\psi(\sigma^{-n}t - rm)$로 두고, $(f, \psi_{nm}) = \Phi_\phi f(a_n, b_{mn})$일 때, $f(t) \approx \tilde{f}(t) = \frac{(\sigma-1)\gamma}{C_\phi}\sum_{n,m}(f, \psi_{n,m})\psi_{n,m}(t)$로 쓸 수 있다.

Frame 이론이나 MRA를 이용하여도 이동과 확장/수축의 중복급수(double series)로 위와 유사한 웨이브릿들의 이산집합 $\{\psi_{n,m}\}$으로 복원정리를 구성할 수 있다.

ϕ를 $L^1(R^n)$에 속하는 것으로 bounded radial 함수라 하면 ϕ가

$$\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\phi}(s)|^2}{s}ds < \infty \tag{27}$$

일 때 ϕ는 허용조건을 만족한다고 정의한다. 식(28)은 $\phi \in L^2(R)$ 일 때의 허용조건인

$$\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\phi}(s)|^2}{s}ds < 0 \tag{28}$$

과는 다름을 알 수 있다. 그리고

$$\Phi(x) = \int_1^2 s^{n-1}\phi(sx)\,ds \tag{29}$$

을 L^1-웨이브릿이라 부른다.

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2^{kn}}\Phi\left(\frac{x}{2^k}\right) \tag{30}$$

를 웨이브릿 Φ의 dyadic 확장/수축하면 각각의 Φ_k에 대하여

$$W_\phi f(k,b) = f * \Phi_k(b) \tag{31}$$

라는 L^1-웨이브릿 변환을 정의한다. 여기에서 $f \in L^1(R^n) \cap L^2(R^n)$이고

$$f * \Phi_k(b) = \int_{R^n} f(b-y)\Phi_k(y)\,dy \tag{32}$$

는 f와 Φ_k의 콘볼루션이다. 그러면 다음과 같은 중요한 이산복원정리를 유도할 수 있다.

정리 1. $f \in L^1(R^n) \cap L^2(R^n)$이고 ϕ가 허용조건을 만족하는 bounded radial 함수일 때, $C_\phi = \int_0^{\infty}\frac{\hat{\phi}(s)}{s}ds$라 하면 아래의 복원정리가 성립한다.

$$C_\phi f(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \Phi_k(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\phi f(k,b)$$
for almost all $b \in R^n$.

정리 2. $\phi \in L^1(R)$가 bounded이고, $\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\phi}(s)|}{s}ds < \infty$, $\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\phi}(-s)|}{s}ds < \infty$일 때, $\frac{1}{2}C_\phi = \int_0^{\infty}\hat{\phi}(s)\frac{ds}{s} = \int_0^{\infty}\hat{\phi}(-s)\frac{ds}{s}$라고 하면 아래의 복원정리가 성립한다.

for $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$,
$\frac{1}{2}C_\phi f(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\phi f(k,b)$ for almost all $b \in R$.

Remarks : 위의 정리들을 이용한 다채롭고 강력한 응용들은 연구 내용 응용부분을 참조하고, 다차원 공간에서도 신호 f를 복원할 수 있음을 정리 1은 시사하고 있다. 다음의 예에서는 실제로 위의 정리를 이용하여 L^1-웨이브릿을 만들고, 임펄스성 신호를 복원할 것이다. 푸리에 급수를 이용한 복원(Gibbs 현상이 일어남)이나 다른 여러 알려진 웨이브릿으로 복원된 것 보다 나은 결과가 도출될 것을 예상한다.

Example. $\phi(x) = \cos x\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$라 두면 compactly support를 갖는 L^1wavelet

$\Phi(x) = \int_1^2 \phi(sx)ds$을 만들고, 그것의 그래프가

Maxican Hat과 비슷하므로 우리는 이 $\Phi(y)$를 New Maxican Hat이라 부른다.

본 논문에서 제안한 New Maxican Hat의 Mother 웨이브릿은 그림 9에 나타나 있다. 또한 이의 Mother 웨이브릿을 확장/수축한 것은 그림 10에 나타나 있다. 그림 10의 (a)는 Mother 웨이브릿을 확장한 것이고, (b)는 Mother 웨이브릿이고, (c)는 Mother 웨이브릿을 수축한 것이다.

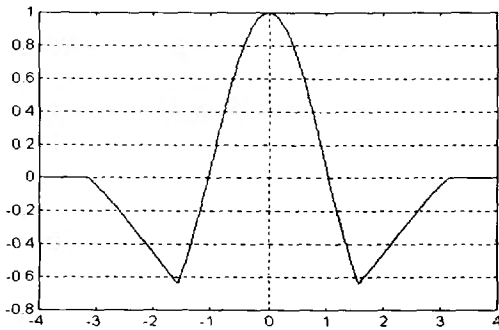



그림 9. New Maxican Hat : $\Phi(x) = \int_1^2 \cos sx \, \chi_{[-\pi,\pi]}(sx) ds$

(a) (b) (c)

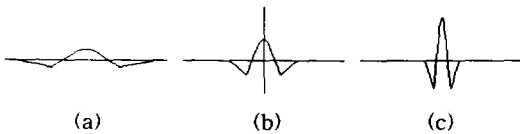



그림 10. Mother 웨이브릿을 확장/수축한 New Maxican Hat

5. 실험 결과 및 고찰

본 논문에서는 수학적으로 증명하여 개발한 L^1-함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿 변환을 사용하여 시간-주파수에서의 신호복원 및 분석에 응용한다. 새로운 웨이브릿 변환을 사용한 시간-주파수에서의 신호복원 방법으로는 구형파 및 정현파를 입력신호로 하여 확인하였고, 응용 신호로는 실제의 음성신호를 이용하였다.

본 논문에서 제안한 새로운 Mother 웨이브릿을 dilation한 것이 그림 11에 나타나 있다. 그림 11에서 확장계수 k를 0에서 5까지 확장시켰을 때, k가 증가할수록 진폭은 작아지고 파형의 폭은 확장됨을 알 수 있다.

그림 12는 제안한 New Maxican Hat, L^1-웨이브릿의 복원정리가 성립함을 보인 것으로 그림 12(a)는 진폭이 1이고, 폭이 ±4인 구형파 입력신호이고, 그림 12(b)는 복원한 신호로서 dilation 계수 k=±5로 하였을 때 정확히 펄스의 폭이 ±4이고, 고주파 에지 부분의 직각인 성분을 얻을 수 있었고, 구형파의 진폭이 1에 가깝게 복원함을 확인할 수 있었다. 그리고, 그림 13은 ±1로 진동을 하며, 주파수가 1kHz인 정현파를 입력신호로 인가하고, dilation 계수 k=±5로 하였을 경우의 입력신호와 복원신호를 나타낸다. 따라서 제안한 새로운 웨이브릿이 거의 완전한 복원 특성을 유지함을 알 수 있다. 이 경우에는 k의 dilation 계수를 ±로 더욱 확장/수축하여 주어진 신호에 적용할 경우 완전복원신호를 얻을 수 있게 된다.

그림 14(a)는 '국방'이라는 실제의 음성신호를 10kHz로 표본화하고, 16 비트로 A/D 변환시킨 입력신호를 나타낸다. 제안한 방법을 이용하여 k를 -5에서 10까지 확장/수축시켜 복원한 결과를 그림 14(b)에 나타내었다. 실험 결과로써, 제안한 새로운 웨이브릿은 입력신호와 거의 완전한 복원이 되어짐을 알 수 있다.

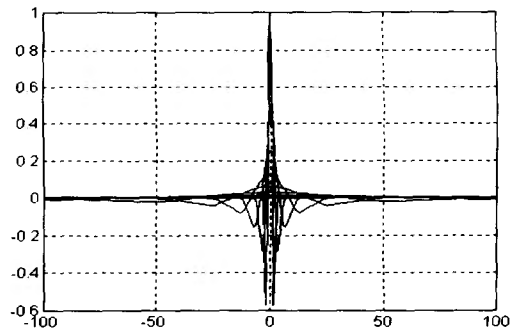



그림 11. k=0에서 5까지 확장(dilation)시킨 New Maxican Hat

(a) 입력신호 (b) 복원신호

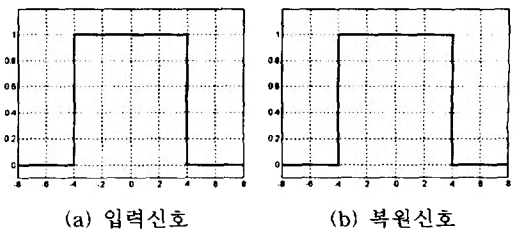



그림 12. 제안한 새로운 L^1-웨이브릿에 대한 구형파 입력 실험

(a) 입력신호 (b) 복원신호

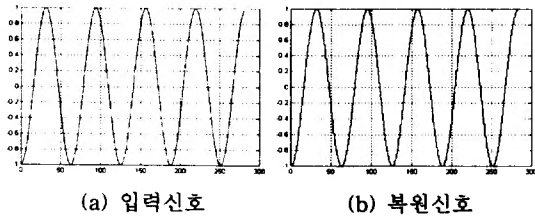



그림 13. 실제 음성신호를 인가하였을 경우의 완전복원 실험

(a) 입력음성신호 : '국방' (b) 복원신호

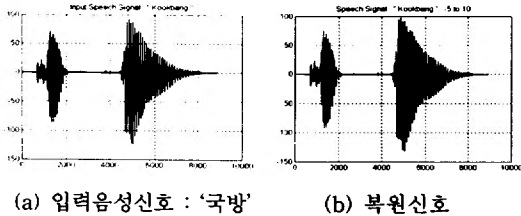



그림 14. 실제 음성신호를 인가하였을 경우의 완전복원 실험

6. 결 론

본 논문에서는 수학적으로 증명하여 개발한 L^1-함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿 변환을 사용하여 시간-주파수에서의 신호 복원 및 분석에 응용하였다. 제안한 웨이브릿은 L^1-함수 공간에서 허용조건을 만족하고, 복원조건이 성립하는 새로운 웨이브릿이다. 제안한 웨이브릿의 형태는 Mexican Hat과 유사한 형태를 가진다.

제안한 웨이브릿은 CWT에서 사용한 허용조건을 자연스럽게 확장함으로써 기존의 것보다 간편하고 활용도가 우수한 새로운 형태의 L^1-웨이브릿이다.

본 논문에서 개발한 새로운 웨이브릿 변환을 사용한 시간-주파수에서의 분석 및 복원에 대한 실험으로써 고조파의 합성신호인 구형파, 정현파 및 비정상 상태의 신호인 음성신호를 이용하여 원신호로 완전 복원이 되어짐을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] M. H. Ackroyd, "Short-time spectra and time frequency energy distributions," *Jour. of Acous. Soc. of America*, vol. 50, no. 5, pp.1229-1231, July 1970.

[2] J. B. Allen and L. R. Rabiner, "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis," *IEEE Proc.* vol. 65, no. 11, pp.1558-1564, Nov. 1977.

[3] I. Daubechies, "Orthonormal basis of compactly supported wavelets," Commun. on Pure Applied Math., vol. 41, no. 7, pp.909-996, 1988.

[4] I. Daubechies, *The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis*, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 36, pp.961-1005, Sept. 1990.

[5] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelets representation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* vol. 11, no. 7, pp.674-693, July 1989.

[6] C. K. Chui, *An introduction to wavelets*, Academic Press, 1992.

[7] C. E. Heil and D. F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms*, SIAM Review 31, pp.628-666, 1989.

[8] Y. Meyer, Orthonormal wavelets, In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pp.21-37, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] N. J. Fliege, *Multirate Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons Ltd., pp.276 -277, 1994

[10] C. C. Hsu, J. Ding, M. E. Zaghloul, H. Szu, "An Image Discrete Wavelet Transform and the Hardware Implementation," *ISCAS '95 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, pp.1315-1319, 1995.

안 주 원

1996년 2월 부경대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1998년 2월 부경대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
2000년 8월 부경대학교 대학원 전자공학과 박사과정 수료
관심분야 : 적응신호처리, 웨이브릿변환, 영상신호처리

허 영 대

1987년 2월 숭실대학교 전자계산학과 졸업(학사)
1989년 12월 국방대학원 전자계산학과 졸업(석사)
1998년 8월 부경대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1979년 9월～1993년 3월 육군 전산장교
1996년 3월～현재 포항1대학 전산정보처리과 조교수
관심분야 : 웨이브릿 변환, 적응신호처리, 능동잡음제거

권 기 룡

1986년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1990년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
1994년 8월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1996년 3월～현재 부산외국어대학교 전자·컴퓨터공학부 조교수
관심분야 : 웨이브릿변환, 적응신호처리, 능동잡음제거, 멀티미디어 통신 등

류 권 열

1982년 8월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1990년 8월 경북대학교 산업대학원 전산전공 졸업(공학석사)
1998년 2월 부경대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1986년 7월～1995년 4월 포항공과대학교 전자계산소(전산과장)
1998년 4월～현재 위덕대학교 멀티미디어공학과 전임강사
관심분야 : 영상처리, 멀티미디어통신

문 광 석

1979년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사).
1981년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
1989년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1988년 1월～12월 일본 동경대학교 공학부 연구원
1997년 8월～1998년 7월 미국 Jackson State University 객원교수
現 부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부 교수
관심분야 : 영상신호처리, 적응신호처리 등